SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/• La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur **R**.

• $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur **R**.

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ donc f est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme produit de ces fonctions continues.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{|x|} = 0$.

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -\sqrt{|x|} = 0$.

d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 et par suite f est continue sur **R**.

2°/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

3°/• $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

• $\forall x \in \mathbf{R}_-^*$, $f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{-1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$.

4°/a) On a : $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} > 0$ donc f est strictement croissante sur **R**.

b) f est continue et strictement croissante sur **R** donc f réalise une bijection de **R** sur $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ ce qui donne que f admet une fonction réciproque définie sur **R**.